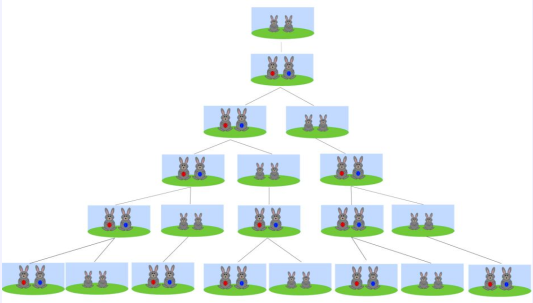
OMM - Populacioni modeli

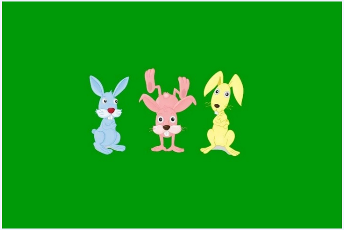
April 17, 2026

Jedna vrsta



- Par zečeva (M i Ž) su pušteni na livadu.
- Zečevi postaju polno zreli sa mesec dana.
- Trudnoća zečice traje mesec dana nakon čega na svet donosi novi par zečeva (M i Ž).
- Zečevi nikad ne umiru.
- Upareni zečevi nastavljaju da reprodukuju novi par zečeva na svakih mesec dana.

Koliko će biti zečeva za godinu dana?



- jedna vrsta
- postoji neograničeno resursa
- umiru prirodnom smrću

- homogenost razmnožavanja po broju jedinki (broj novih jedinki je proporcionalan broju jedinki)
- homogenost razmnožavanja po vremenu (nema sezonskih oscilacija)
- homogenost izumiranja po vremenu, proporcionalno broju jedinki

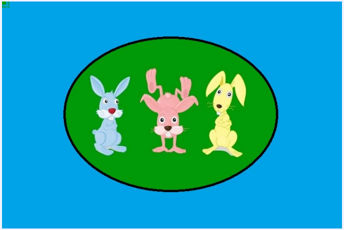
$$
\begin{aligned}
N(t+\Delta t) &= N(t) + n\cdot\Delta t\cdot N(t) - m\cdot\Delta t\cdot N(t)\\
&= N(t) + \Delta t\cdot N(t)\cdot p
\end{aligned}
$$

$$N(t) \in \mathbb{N}, \quad t, \Delta t, n, m, p \in \mathbb{R}$$

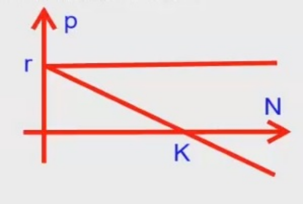
$$N(t) \in \mathbb{R}, \quad t, \Delta t, n, m, p \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = pN(t), \; N(0) = N_0} \Longrightarrow \boxed{N(t) = N(0) \cdot e^{pt}}$$

Malthusov model



- jedna vrsta
- resursi su ograničeni (max K jedinki)
- p je funkcija od $N(t)$



Linearan slučaj:

$p = r(1 - \frac{N(t)}{K})$, priraštaj

$r = p(0)$, reproduktivna stopa

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), \; N(0) = N_0} \Longrightarrow \boxed{N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) \cdot e^{-rt}}}$$

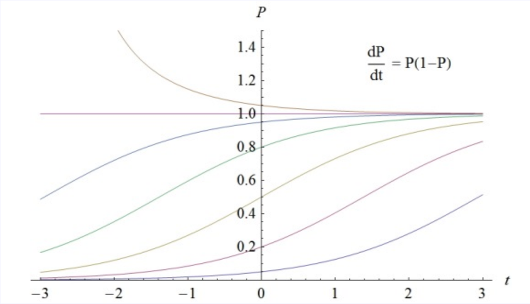
Verhulstov model

Bezdimenzioni oblik

Smena: $x(t) = \frac{N(t)}{K}$ - bezdimenziona veličina, $x \in [0, 1]$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = rx\,(1-x)\,,\ x(0) = \frac{N(0)}{K}} \Longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x(0)} - 1\right) \cdot e^{-rt}}}$$

Logistički model

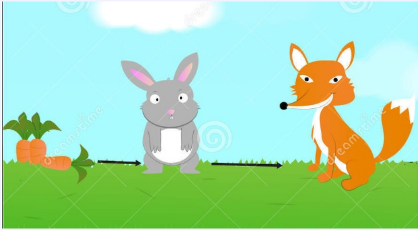


Logistička kriva, S-kriva ($r = 1$)

2 stacionarna rešenja:

- $x = 0$ (nestabilno)
- $x = 1$ (stabilno)

Dve vrste (plen i grabljivci)



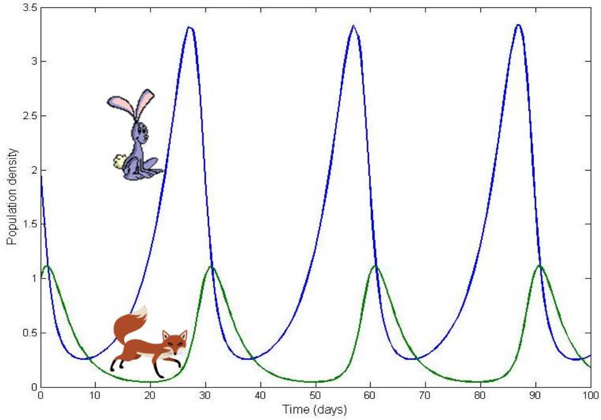
- 2 vrste (grabljivac i plen)
- plen se hrani kapacitetom staništa (neograničeno)
- grabljivac se hrani plenom (ograničeno)
- grabljivci nemaju neprijatelja (umiru prirodnom smrću)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= aP - bPG, \quad P(t_0) = P_0 \\ \frac{dG}{dt} &= cPG - mG, \quad G(t_0) = G_0 \end{aligned}}$$

Lotka-Voltera model

- a - priraštaj plena
- b - faktor koji se odnosi na stopu ulovljenog plena
- c - faktor koji se odnosi na stopu radjanja grabljivaca
- m - mortalitet grabljivaca

Zavisnost populacija u odnosu na vreme



Bezdimenzioni oblik

Stacionarna rešenja:

- $P = G = 0$
- $P = \frac{m}{c}, \ G = \frac{a}{b}$

Smena:
$x(t) = \frac{P(t)}{P_S}, \ y(t) = \frac{G(t)}{G_S}$ - bezdimenzione veličine, $(P_S = \frac{m}{c}, \ G_S = \frac{a}{b})$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = ax(1-y), \ \ x(0) = \dfrac{P(0)}{P_S} \\ \dfrac{dy}{dt} = -my(1-x), \ \ y(0) = \dfrac{G(0)}{G_S} \end{array}}$$

$\Longrightarrow \ a(\ln(y) - y) + m(\ln(x) - x) = C$
$C = \ a(\ln(y(0)) - y(0)) + m(\ln(x(0)) - x(0))$
$\Longrightarrow$ fazni dijagram

Populacija grabljivaca u odnosu na populaciju plena (fazni dijagram)